

基于均匀圆阵的信号二维方向角互相关估计

陶建武^{1,2}, 石要武², 常文秀²

(1. 空军第二航空学院, 吉林长春 130022; 2. 吉林大学通信工程学院, 吉林长春 130025)

摘要: 针对复值乘性和加性噪声同时存在的情况, 提出一种基于均匀圆阵的信号二维方向角互相关估计方法. 本文推导出互相关估计公式, 分析了估计的统计性能, 给出了最优参数选择原则. 在不改变均匀圆阵阵列流形的情况下, 此方法抑制了信号中的乘性和加性噪声, 且计算量小. 计算机仿真证明了此方法的有效性.

关键词: 互相关估计; 二维方向角; 均匀圆阵; 乘性噪声

中图分类号: TN911.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112(2003)06-0875-04

Crosscorrelation Estimator of Azimuth-Elevation with UCAs

TAO Jian-wu^{1,2}, SHI Yao-wu², CHANG Wen-xiu²

(1. The Second Aeronautical Institute of Air Force, Changchun, Jilin 130022, China;

2. The Communication Academy, Jilin University, Changchun, Jilin 130025, China)

Abstract: In the presence of circular complex-valued multiplicative and additive noise, we proposed a crosscorrelation estimator for the 2-D direction of arrivals of narrowband source impinging on a uniform circular arrays (UCAs). Further, we analyzed the statistics performance of the estimator and gave the selection criterion of the optimal parameters. This estimator can efficiently eliminate the multiplicative and additive noise in the source and retain the better performance of the UCAs. It is provided with less computational load. Numerical simulations validated the theoretical results.

Key words: crosscorrelation estimation; 2-D direction of arrival; UCAs; multiplicative noise

1 引言

大多数波达方向估计都假设阵列收到的回波信号具有恒定幅值. 可是, 在许多情况下, 这个假设是不成立的. 由于媒介和其它因素等影响, 实际上, 回波信号的幅值和相位是时变的^[1,2]. 从信号的观点来看, 可以认为回波信号已经被乘性和加性噪声同时污染. 因而, 估计背景为乘性和加性噪声共存时的信号波达方向具有重要的理论和实际意义. 对于这类问题, 现在大部分采用极大似然估计^[3], 它可以提供统计上的最优估计. 但是, 极大似然估计的计算量太大, 使它很难在实际中应用. 极大似然估计的改进方法^[4]可以减少计算量, 但是当信噪比较低时, 这种方法仍然需要二维谱峰搜索. 因而, 计算量减少不多.

均匀圆形阵列 (UCA) 是一种中心对称的阵列. 与其它平面阵列相比, 它具有许多优异的特性, 如无左右模糊; 分辨率与方向无关; 方向图在阵列平面旋转时, 波束的形状不会有明显改变; 可利用所有信息同时估计信号的方位角和俯仰角等. 可是, 由于均匀圆阵的阵列流形比均匀线阵复杂得多, 使得许多适用于均匀线阵的估计方法不能直接用于均匀圆阵. 为了解决这一问题, 常运用相位模式激励法^[5]将阵列流形进行变

换, 然后再利用一些估计方法对信号的波达方向进行估计. 但是, 阵列流形的变换必然导致运算量的增大, 同时也会损失均匀圆阵的某些优越性能, 更主要的是这些方法都未考虑回波信号被乘法和加性噪声同时污染的情况. 因而, 在复值乘法和加法噪声同时存在的情况下, 直接利用均匀圆阵的阵列流形, 估计信号的二维方向角是一个有待于研究的问题.

本文针对复值乘性和加性噪声同时存在的情况, 直接利用均匀圆阵的阵列流形, 推导出一种回波信号二维方向角的互相关估计公式. 并分析互相关估计的性能, 给出了最优参数选择原则.

2 信号模型和互相关估计

2.1 信号模型

一个具有 $K+1$ 个各向同性阵元的均匀圆阵, 如图 1 所示. 其中, 一个阵元位于均匀圆阵的圆心 $(0, 0)$ 处, 另外 K 个阵元均匀地分布于一个半径为 r 的圆周上, 即 $(r \cos(k), r \sin(k))$, 其中 $k \in \{0, \dots, K-1\}$, $\Delta = 2\pi/K$ 为相邻两个阵元的间隔角. 为了使圆周上相邻两个阵元的距离是 $\Delta/2$ (Δ 是载波波长), 均匀圆阵的半径 $r = \Delta/4 \sin(\Delta/4)$. 考虑一个远场窄带平面波信号入射到阵列, 其方位角 (θ, ϕ) 是从 x 轴沿

逆时针方向到信号入射方向在阵列平面投影的夹角,俯仰角 $\theta \in [0, \pi/2]$ 是 Z 轴与信号入射方向之间的夹角.

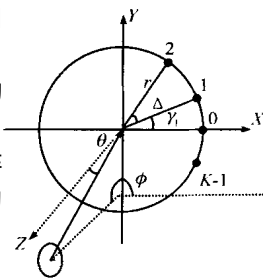


图 1 均匀圆形阵列的结构

在同一时刻,圆周上第 k 个阵元收到的信号与圆心上阵元收到的信号可以分别由式(1)和(2)表示.

$$x_k(t) = a(t) \exp[j \cos(\phi - \gamma_k)] + n_k(t), \quad k=0, 1, \dots, K-1 \quad (1)$$

$$x(t) = a(t) + n(t) \quad (2)$$

其中: $\cos(\phi - \gamma_k)$ 是圆周上第 k 个阵元收到的回波信号与圆心处阵元收到的回波信号之间的相位差,且 $\gamma_k = (2\pi r / \lambda) \sin \theta$. $\gamma_k = 2\pi k / K$ 是第 k 个阵元到圆心的连线与 x 轴的夹角. $a(t)$ 是信号的随机复振幅,它可以等效于逐渐衰减的乘性噪声. $n(t)$ 和 $n_k(t)$ 是加性噪声.

通常作如下假设:

- (1) $a(t)$ 是复值高斯过程,对于均值 $\mu e^{j\phi}$ ($\mu > 0$ 和 $\phi < 2\pi$) 是圆对称的,其协方差函数 $R_a(T)$ 由实值参数矢量 $\mu = [\mu_1, \dots, \mu_p]^T$ 来表达,且 $R_a(0) = \mu^2$;
- (2) 加性噪声 $n(t)$ 和 $n_k(t)$ 是零均值白复圆高斯过程.其方差为 σ^2 , $n(t)$ 和 $n_k(t)$ 是相互独立的;
- (3) $a(t)$ 和 $n(t)$ 是相互独立的, $a(t)$ 和 $n_k(t)$ 是相互独立的;
- (4) $a(t)$ 的协方差函数 $R_a(T)$ 是实值的,并且是正的.

在(1)的假设中,如果 $\mu > 0$ 和 $\phi = 0$,则信号的复振幅具有恒定幅值.如果 $\mu = 0$ 和 $\phi = 0$,则信号的复振幅具有 Rayleigh 分布.如果 $\mu > 0$ 和 $\phi \neq 0$,则信号的复振幅具有 Rician 分布.通常定义 Rician 因子为主通道功率与散射通道功率之比,即 μ^2 / σ^2 .在(4)的假设下, $a(t)$ 的功率谱密度是关于零频对称的.如在移动通讯中,(4)意味着围绕移动单元的散射是关于中心角均匀分布的.而在电离层通讯和多普勒雷达中, $R_a(\cdot)$ 常被假设具有高斯或指数形式^[6].

2.2 波达方向的互相关估计

如果 $a(t)$ 是非零均值的,或者它具有已知形状的单峰谱,如 $a(t)$ 是低通的并且谱峰在直流处,那么波达方向可由谱峰搜索方法来估计.在恒定幅值的情况下,这个方法就是极大似然法.通常,频域搜索方法是非常费时的,很难在实际中应用.由于互相关运算的计算量小,采用互相关方法估计信号的波达方向是非常实用的.对于由式(1)和式(2)所表示的两个随机信号,其互相关序列如下:

$$C_k(m) = E\{x^*(t) x_k(t+m)\} = [R_a(m) + \mu^2] \exp[j \cos(\phi - \gamma_k)] m, \quad k=0, 1, \dots, K-1 \quad (3)$$

其中: m 是时间延迟.当 $R_a(m)$ 满足假设(4)且 $m > 0$ 时, $C_k(m)$ 是复变量,其相位为:

$$\angle C_k(m) = \cos(\phi - \gamma_k), \quad k=0, 1, \dots, K-1 \quad (4)$$

其中: \angle 表示相位算子.当信号的方位角 ϕ 等于第 k 个阵元到圆心的连线与 x 轴的夹角 γ_k 时,由于 $\cos(\phi - \gamma_k) = 1$,第 k 个

阵元互相关函数的相位 $\angle C_k(m)$ 达到最大值,且等于 γ_k .因而,回波信号的波达方向估计值可由下式求出:

$$\begin{aligned} \cos(\phi - \gamma_k) = 1 \text{ 和 } \hat{\phi} = \angle C_k(m) \\ \text{s. t. } C_k(m) \\ = \max\{ \angle C_0(m), \angle C_1(m), \dots, \angle C_{K-1}(m) \} \end{aligned} \quad (5)$$

其中: $\angle C_k(m)$ 是采样数据互相关函数的相位,而采样数据的互相关函数由下式求出:

$$C_k(m) = \frac{1}{N-m} \sum_{t=0}^{N-1-m} x^*(t) x_k(t+m), \quad k=0, 1, \dots, K-1 \quad (6)$$

其中: N 是采样数.

根据式(5),回波信号的方位角和俯仰角估计值可从下式得到:

$$\hat{\phi} = \gamma_k = \frac{2\pi k}{K} \text{ 和 } \hat{\theta} = \arcsin\left[\frac{r}{2} \angle C_k(m)\right] \quad (7)$$

2.3 互相关估计算法步骤

- (1) 利用式(6)计算各个阵元的回波信号采样数据的互相关函数 $C_k(m)$, $k=0, 1, \dots, K-1$;
- (2) 求出互相关函数 $C_k(m)$ 的相位 $\angle C_k(m)$, $k=0, 1, \dots, K-1$;
- (3) 利用式(5)从 K 个相位中,求出最大相位 $\angle C_k(m)$ 及相应的夹角 γ_k ;
- (4) 利用式(7)计算回波信号的方位角和俯仰角估计值.

3 性能分析

3.1 互相关函数估计

命题 1 在假设(1)~(4)下,有限样本的互相关采样估计 $C_k(m)$ 和 $C_k(l)$ 的协方差函数表达式, $l, m > 0$, 由下式给出:

$$\begin{aligned} \text{cov}\{C_k(m), C_k(l)\} &= \frac{1}{(N-m)(N-l)} \\ &\cdot \sum_{T=m-N+1}^{N-1-l} D(T) [R_a(T) R_a(T+l-m) \\ &+ \mu^2 R_a(T) + \mu^2 R_a(T+l-m)] \\ \text{cov}\{C_k(m), C_k^*(l)\} &= \frac{e^{2j \cos(\phi - \gamma_k)}}{(N-m)(N-l)} \\ &\cdot \sum_{T=m-N+1}^{N-1-l} D(T) [R_a(T-m) R_a(T+l) \\ &+ \mu^2 R_a(T-m) + \mu^2 R_a(T+l)] \end{aligned} \quad (8)$$

其中: $D(\cdot) = \max(N-l-|\cdot|, \min(0, \max(\cdot, m-l)))$, 0) (9)

证明 见附录 A.

注意, $D(T)$ 实际是 N, l 和 m 的函数.

下面进一步推导在大样本情况下,互相关估计的协方差函数表达式,对于大样本,就是说 $m, l \ll N$, 且 N 是很大的数.首先假设 $R_a(\cdot)$ 是绝对可积的,即:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R_a(T)| < \infty \quad (10)$$

这意味着是功率谱密度 $S_a(f)$ 连续的,令

$$\bar{R}_a(T) = \frac{1}{2} S_a^2(\cdot) e^{j T \Delta}$$

对于许多特殊的模型, $\bar{R}_a(m)$ 很容易计算, 如频谱具有高斯分布的情况, 可以得到下式:

$$\bar{R}_a(T) = \frac{4}{a} \sqrt{2} e^{-2T^2/8}$$

进一步, 当 $a(t)$ 是线性过程时, 由于 $S_a^2(\cdot)$ 也是线性过程, $\bar{R}_a(m)$ 也容易计算.

在式(10)的条件下, 便有以下式

$$\frac{1}{N} \sum_{T=1}^N D(T) R_a(T+i) = S_a(0)$$
$$\frac{1}{N} \sum_{T=1}^N D(T) R_a(T) R_a(T+i) = \bar{R}_a(i) \quad (11)$$

于是, 就得到下列命题.

命题 2 在假设(1)~(4)和式(10)的条件下, 大样本的互相关采样估计 $\hat{c}_k(m)$ 和 $\hat{c}_k(l)$ 的协方差函数表达式, $N \gg l$

$m > 0$, 由下式给出:

$$N \text{cov} \left\{ \hat{c}_k(m), \hat{c}_k(l) \right\} = \bar{R}_a(l-m) + 2\mu^2 S_a(0)$$
$$N \text{cov} \left\{ \hat{c}_k(m), \hat{c}_k^*(l) \right\} = e^{2i \cos(\phi) k} \left[\bar{R}_a(l+m) + 2\mu^2 S_a(0) \right] \quad (12)$$

3.2 相位估计

令 $\hat{\phi}(m) = \angle \hat{c}_k(m)$ 表示 $\hat{c}_k(m)$ 的相位. 由于是非线性算子, 通常, 有限样本相位估计的误差分析是不容易做的. 这里, 假设相位估计是较精确的, 只保留泰勒公式的一次项进行小误差分析.

基于命题 1, 可以推导出下列命题.

命题 3 在假设(1)~(4)情况下, 有限样本的相位估计 $\hat{\phi}(m)$ 和 $\hat{\phi}(l)$ 的协方差函数表达式, 其中 $l > m > 0$, 由下式给出:

$$\text{cov} \left\{ \hat{\phi}(m), \hat{\phi}(l) \right\} = \frac{1}{2(N-l)(N-m)} \frac{1}{\left[S_a(m) \right] \left[S_a(l) \right]}$$
$$\cdot \sum_{T=m-N+1}^{N-1} \left\{ D(T) \left[a(T) a(T+l-m) - a(T+l) a(T-m) \right] \right.$$
$$\left. + D(T) \left[a(T) + a(T+l-m) - a(T+l) - a(T-m) \right] \right\} \quad (13)$$

其中: $\mu^2 = \frac{2}{a}$, $S_a(\cdot) = R_a(\cdot) / \frac{2}{a}$.

证明 见附录 B.

利用式(11), 能够推导出大样本情况下, 相位估计 $\hat{\phi}(m)$ 和 $\hat{\phi}(l)$ 的协方差函数表达式.

命题 4 在假设(1)~(4)和式(10)情况下, 大样本相位估计 $\hat{\phi}(m)$ 和 $\hat{\phi}(l)$ 的协方差函数表达式, 其中 $N \gg l > m > 0$, 由下式给出:

$$\text{cov} \left\{ \hat{\phi}(m), \hat{\phi}(l) \right\} = \frac{1}{2N} \frac{\left[\bar{R}_a(l-m) - \bar{R}_a(l+m) \right]}{\left[S_a(m) \right] \left[S_a(l) \right]} \quad (14)$$

其中: $\bar{R}_a(\cdot) = R_a(\cdot) / \frac{4}{a}$. 注意: 不论 ϕ 为何值, 大样本的协方差函数随 $1/N$ 减少而减少.

3.3 二维方向角估计

根据式(5), $\hat{\theta}$ 的估计方差为:

$$\text{Var} \left\{ \hat{\theta} \right\} = \text{Var} \left\{ \hat{\phi}(m) \right\} \quad (15)$$

其中: $\text{Var} \left\{ \hat{\phi}(m) \right\}$ 由命题 3 得到, 从式(13)可以得到下列等式:

$$\text{Var} \left\{ \hat{\phi}(m) \right\} = 0$$

$$\text{s.t. } \hat{\theta}_a(T) = \hat{\theta}_a(T+m) - \hat{\theta}_a(T-m)$$

$$2 \hat{\theta}_a(T) = \hat{\theta}_a(T+m) + \hat{\theta}_a(T-m) \quad (16)$$

在实际应用中, $R_a(\cdot)$ 常被假设有高斯或指数形式, 因而, 由式(15)和式(16)可得, $\text{Var} \left\{ \hat{\theta} \right\} = 0$ 的充要条件是 $m = 0$, 即对于二维方向角估计, 最优的时间延迟 m 应为零.

从式(7)可知, 回波信号的方位角估计精度依赖于阵元数 K . K 越大, 相邻两个阵元的间隔角 $\Delta\theta$ 越小, 方位角估计精度越高. 若在相邻两个阵元上, 采样序列互相关函数的相位近似相等, 方位角和俯仰角可由下式求得:

$$\phi = (\hat{\theta}_k + \hat{\theta}_{k+1}) / 2 = \theta_k + \Delta\theta / 2 \quad (17)$$

$$\hat{\theta} = \left[\hat{c}_k(m) \right] / \cos(\Delta\theta / 2) \quad (18)$$

4 数值仿真

借助 Monte Carlo 仿真实验可以验证互相关估计的性能, 考虑一个具有 11 个阵元的均匀圆阵. 为使圆周上相邻两个阵元间距为半个波长, 取圆的半径 $r = 0.809 \lambda$. 收到信号的方位角和俯仰角分别为 $\phi = 18^\circ$ 和 $\theta = 70^\circ$.

研究两种情况, 一是互相关估计精度与 m 的关系, 二是互相关估计精度与信噪比 SNR 的关系. 假设 $a(t)$ 为 Rayleigh 分布 ($\mu = 0$), 协方差函数 $R_a(\cdot) = \frac{2}{a} \exp(-|\cdot|)$, 其中 $\mu = 2 \times 0.005$, 采样数固定为 $N = 20$, 且信噪比定义为 $\text{SNR} = \frac{2}{a} / \sigma^2$.

对每种情况, 给出 1000 次 Monte Carlo 仿真实验结果. 图 2 表示方位角和俯仰角的均方根误差随 m 的变化曲线, 这里 $\text{SNR} = 5\text{dB}$. 从图 2 可以看出, 当 $m = 0$ 时, RMSE 最小, 验证理论分析的结果. 图 3 表示方位角和俯仰角的均方根误差随 SNR 的变化曲线, 这里 $m = 0$. 从图 3 可以看出当 SNR 很小时, 估计精度也很好, 这说明互相关估计可以消除信号中的噪声, 理论分析也说明了这一点.

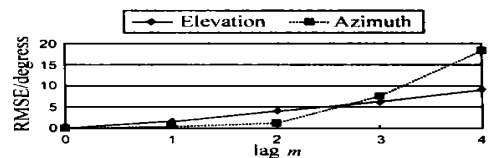


图 2 方位角和俯仰角的均方根误差 (RMSE) 随 m 的变化曲线 ($\text{SNR} = 5\text{dB}$)

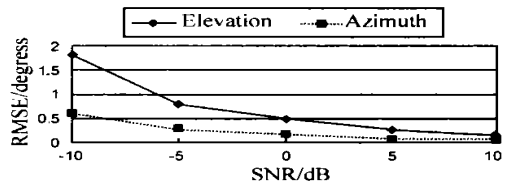


图 3 方位角和俯仰角的均方根误差 (RMSE) 随 SNR 的变化曲线 ($m = 0$)

5 结论

在复值乘性和加性噪声同时存在的情况下, 本文提出了一种基于均匀圆阵的信号二维方向角的互相关估计方法. 推

出了有限和大样本两种情况下的互相关估计的协方差函数。其结果表明当延迟 m 为零时,互相关估计方差为最小。为了进一步提高互相关估计精度,可增加阵元数 K 。通过理论分析和数值仿真,此方法能够有效地抑制信号中的乘性和加性噪声,保留了均匀圆阵的良好性能,且具有方法简单,计算量小,不需要谱峰搜索,便于实际应用等特点。

附录 A:互相关函数估计的协方差

令 $\text{cum}(a) = E[a]$, $\text{cum}(a, b) = E[ab] - E[a]E[b]$, 对联合高斯随机变量 (a, b, c, d) , 其协方差满足下式^[7]:

$$\begin{aligned} \text{cov}(ab, c^*d^*) &= \text{cum}(ab, cd) = E[abcd] - E[ab]E[cd] \\ &= \text{cum}(a, c)\text{cum}(b, d) + \text{cum}(a, d)\text{cum}(b, c) \\ &+ \text{cum}(a, c)\text{cum}(c, d)\text{cum}(b, d) + \text{cum}(a, d)\text{cum}(d, c)\text{cum}(b, c) \\ &+ \text{cum}(b, c)\text{cum}(d, c)\text{cum}(a, c) + \text{cum}(b, c)\text{cum}(c, d)\text{cum}(a, d) \end{aligned} \quad (19)$$

下面推导互相关函数估计的协方差,假设 $l = m = 0$, 则协方差由下式表示:

$$\begin{aligned} \text{cov}\{C_k(m), C_k(l)\} &= \frac{1}{(N-m)(N-l)} \\ &\cdot \sum_{n=0}^{N-1-m} \sum_{t=0}^{N-1-l} \text{cov}\{x^*(n)x_k(n+m), x^*(t)x_k(t+l)\} \end{aligned} \quad (20)$$

令 $a = x^*(n)$, $b = x_k(n+m)$, $c = x(t)$, $d = x_k(t+l)$, 将其代入式(19)。由于 $a(t)$ 的圆对称性,这时式(19)中的第2、第4和第6项为零。展开式(20)就可以得到命题1的前半部。

与上类似,有下式成立:

$$\begin{aligned} \text{cov}\{C_k(m), C_k^*(l)\} &= \frac{1}{(N-m)(N-l)} \\ &\cdot \sum_{n=0}^{N-1-m} \sum_{t=0}^{N-1-l} \text{cov}\{x^*(n)x_k(n+m), x(t)x_k^*(t+l)\} \end{aligned} \quad (21)$$

令 $a = x^*(n)$, $b = x_k(n+m)$, $c = x^*(t)$, $d = x_k(t+l)$, 将其代入式(19),由于 $a(t)$ 的圆对称性,这时式(19)中的第1、第3和第5项为零,展开式(21)就可以得到命题1后半部。

附录 B:相位估计的协方差

令 $C_k(m) = |C_k(m)| \exp[j\phi(m)]$, 并两边取对数。

$$\ln C_k(m) = \ln |C_k(m)| + j\phi(m) \quad (22)$$

将式(22)两边求微分,得:

$$\frac{dC_k(m)}{C_k(m)} = -j \frac{d|C_k(m)|}{|C_k(m)|} + j \frac{d\phi(m)}{d|C_k(m)|}$$

因为 $\phi(m)$ 是实值,可以得到下式:

$$\phi(m) = \left\{ \frac{d|C_k(m)|}{|C_k(m)|} \right\}$$

从而可以导出:

$$\begin{aligned} &\text{cov}\{\phi(m), \phi(l)\} \\ &= \frac{1}{2} K \left\{ \frac{\text{cov}\{C_k(m), C_k(l)\}}{C_k(m)C_k^*(l)} - \frac{\text{cov}\{C_k(m), C_k^*(l)\}}{C_k(m)C_k(l)} \right\} \end{aligned} \quad (23)$$

这里, $I\{\cdot\}$ 是 $\{\cdot\}$ 的虚部, $R\{\cdot\}$ 是 $\{\cdot\}$ 的实部。由于 $R_a(\cdot)$ 是实值,将式(8)代入式(23),就可以得到式(13)。

参考文献:

- [1] A B Gershman, V I Turchin, V A Zverev. Experimental results of localization of moving underwater signal by adaptive beamforming[J]. IEEE Trans, 1995, SP-43(10): 2249 - 2257.
- [2] A B Gershman, C F Mecklenbrauker, J F Bohme. Matrix fitting approach to direction of arrival estimation with imperfect coherence of wavefronts[J]. IEEE Trans, 1997, SP-45(7): 1894 - 1899.
- [3] T Trump, B Ottersten. Estimation of nominal direction of arrival and angular spread using an array of sensors[J]. Signal Process, 1996, 50(4): 57 - 70.
- [4] O Besson, F Vincent, P Stoica, et al. Approximate maximum likelihood estimator for array processing in multiplicative noise environments[J]. IEEE Trans, 2000, SP-48(9): 2506 - 2518.
- [5] C P Mathews, M Zoltowski. Eigenstructure techniques for angle estimation with uniform circular arrays[J]. IEEE Trans, 1994, SP-42(9): 2395 - 2407.
- [6] R J Doviak, D Zrnic. Doppler Radar and Weather Observations[M]. New York: Academic, 1993.
- [7] P McCullagh. Tensor Methods in Statistics[M]. London: Chapman & Hall, 1987. 254 - 257.

作者简介:



陶建武 男, 1959年5月生于吉林省吉林市, 教授, 吉林大学通信工程学院博士生, 1989年获吉林工业大学电子工程系硕士学位, 曾获军队科技进步奖三项, 发表论文三十多篇, 现主要从事阵列信号处理及应用, 非平稳信号处理等。



石要武 男, 1954年5月生于吉林长春, 教授, 博士生导师, 1994年获吉林工业大学电子工程系博士学位, 主要从事非平稳信号处理及应用, 混沌信号的检测与控制等。